演習問題B

（６）次の問いに答えよ。

（ｉ）曲線 $y=x\sin x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ の　原点O以外の点における接線のうちOを通るものの方程式を求めよ。

（ii）（ｉ）において　接点Pが第4象限にあるとき　　線分OPと曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし第4象限とは $\dfrac{3}{2}\pi\leqq x\leqq 2\pi$ とする。

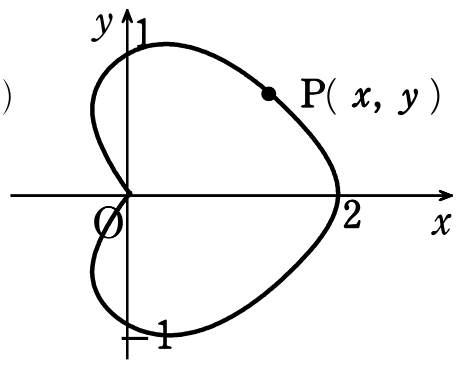
（７）曲線 $y=\log x$ のグラフ上の2点A, Bを結ぶ線分ABの中点が　点P(2，0) であるという。2点A, Bの座標および　曲線 $y=\log x$ と線分ABで囲まれた部分の面積を求めよ。ただし　Aの x 座標はBの x 座標より小さい

（８）放物線 $y=x^2-1$ と直線 $y=x+1$ で囲まれた部分を　x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

（９）曲線 $y=\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

(10) 半径 a の球の中央から　半径 b の円柱状の穴をくりぬいてた立体の体積を求めよ。　ただし $a>b$ とする。

(11) 極方程式 $r=1+\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ で表される曲線（カージオイド）上の点Pの直交座標を $(x,\ y)$ とする。



（ｉ）x, y をそれぞれ θ の関数として表せ。

（ii）この曲線の長さを求めよ。

解答

（6）（ｉ） $y=x\sin x \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$

$y=0$ のとき $x=0, \pi, 2\pi$

微分　$y'=\sin x + x\cos x$

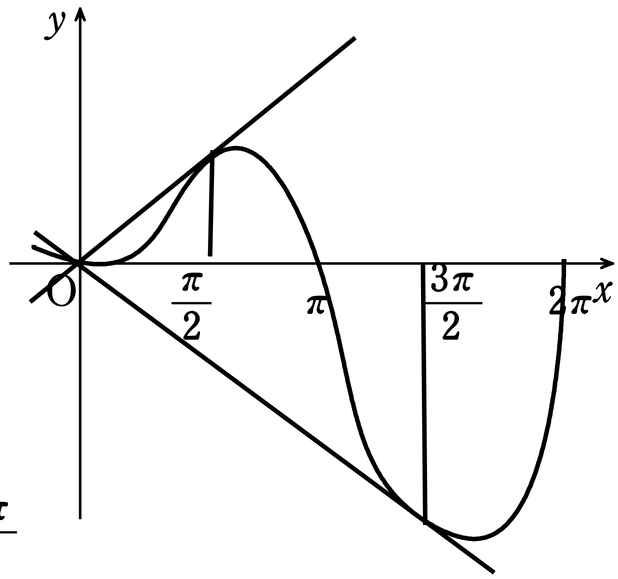
曲線 $y=x\sin x$ 上の点 $(a, a\sin a)$ における接線の方程式　ただし $a\fallingdotseq 0$

$y-a\sin a=(\sin a + a\cos a)(x-a)$

この接線がOを通ることから

$-a\sin a=-a(\sin a + a\cos a)$ より

$\cos a=0$　接点の x 座標　$a=\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$



従って　原点Oを通る接線は2本あって　接線の傾き　$a=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\sin\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}=1$, $a=\dfrac{3\pi}{2}$ のとき　$\sin\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{2}\cos\dfrac{3\pi}{2}=-1$

ゆえに　接線の方程式　$y=x$, $y=-x$

（ii）曲線 $y=x\sin x$ は $y_1=x$ と $y_2=\sin x$ の積に着目　2 本の接線にも着目して　曲線 $y=x\sin x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ の概形を図示すると上図である。

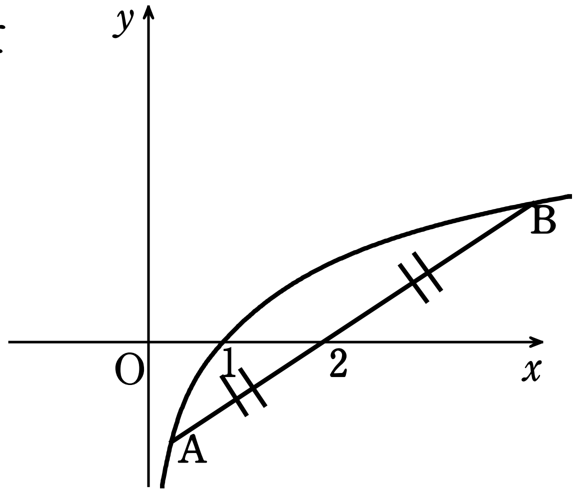
第4象限の接点には　戸惑ったが　囲まれた部分の面積

$$S=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(x\sin x+x)dx$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}}x(-\cos x)'dx=-\left[x\cos x\right]_0^{\frac{3\pi}{2}}+\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,dx$

$$=-\frac{3\pi}{2}\times 0+0+\left[\sin x\right]_0^{\frac{3\pi}{2}}=-1$$

$$S=-1+\int_0^{\frac{3\pi}{2}}x\,dx=-1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2=\frac{9\pi^2}{8}-1$$



（７）直線ＡＢは線分ＡＢの中点 $(2,\ 0)$ を通っているから　傾き m とおくと

直線ＡＢの方程式

$y-0=m(x-2)$ より　$y=mx-2m$

$\mathrm{A}(a,\ \log a)$, $\mathrm{B}(b,\ \log b)$ とおくと

$\dfrac{a+b}{2}=2,\ \dfrac{\log a+\log b}{2}=0$ より

$a+b=4,\ ab=1,\ 0<a<b$

$a,\ b$ は2次方程式　$t^2-4t+1=0$を満たす2つの正の解

よって　$a=2-\sqrt{3},\ b=2+\sqrt{3}$　従って　直線ＡＢの傾き m は1通り

決まって　$m=\dfrac{\log(2+\sqrt{3})-\log(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})}=\dfrac{\log\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$

$$=\frac{\log(2+\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}}=\frac{\log(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$$

囲まれた部分の面積 $\mathrm{S}=\displaystyle\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}\{\log x-(mx-2m)\}\,dx$

$$=\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}\log x\,dx-m\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}(x-2)dx$$

ここで

$$\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}x'\log x\,dx=[x\log x]_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}-\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}x\times\frac{1}{x}dx$$

$$=(2+\sqrt{3})\log(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})\log(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})$$

$$=(2+\sqrt{3})\log(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})\log(2-\sqrt{3})-2\sqrt{3}$$

$$m\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}(x-2)dx=m\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}=\frac{m}{2}[x^2-4x]_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{m}{2}\{(2+\sqrt{3})^2-(2-\sqrt{3})^2-4\times2\sqrt{3}\}$$

$=\dfrac{m}{2}(8\sqrt{3}-8\sqrt{3})=0$　$\Leftarrow$　題意より明かに0

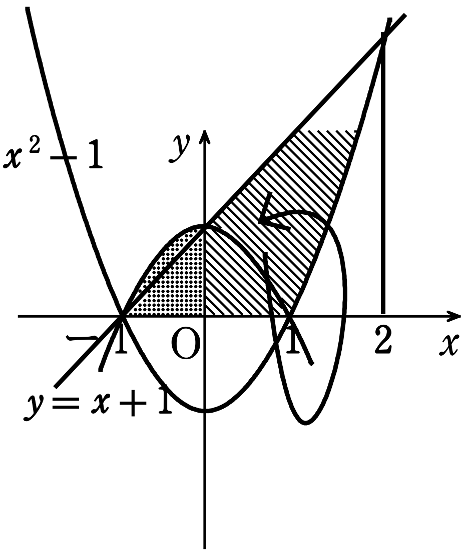
$$S=\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}\log x\,dx-m\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}(x-2)dx$$

$$=(2+\sqrt{3})\log(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})\log(2-\sqrt{3})-2\sqrt{3}-\frac{m}{2}\times 0$$

$$=2\{\log(2+\sqrt{3})-\log(2-\sqrt{3})\}+\sqrt{3}\{\log(2+\sqrt{3})+\log(2-\sqrt{3})\}$$
$$-2\sqrt{3}$$

$$=2\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3}\log(4-3)-2\sqrt{3}$$

$$=4\log(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}$$



（８） x 軸周りに回転する部分の図形を x 軸より上側に表す。右図＋

交点　$x^2-1=x+1$ より $x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$　よって　$x=2,\ -1$

右図より　x 軸周りの1回転させてできる立体の体積　$V=V_1+V_2-V_3$

$$V_1=\pi\int_{-1}^{0}(1-x^2)^2dx=\pi\int_{-1}^{0}(1-2x^2+x^4)dx=\frac{8\pi}{15}$$

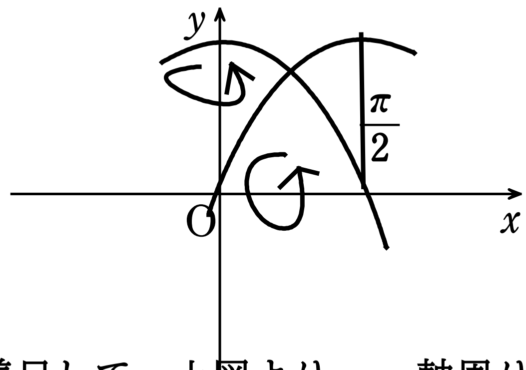
$$V_2=\pi\int_{0}^{2}(x+1)^2dx=\pi\int_{0}^{2}(x^2+2x+1)dx=\frac{26\pi}{3}$$

$$V_3=\pi\int_{1}^{2}(x^2-1)^2dx=\pi\int_{1}^{2}(x^4-2x^2+1)dx=\frac{38\pi}{15}$$

ゆえに　$V=V_1+V_2-V_3$

$$=\pi\left(\frac{8}{15}+\frac{26}{3}-\frac{38}{15}\right)$$

$$=\frac{20}{3}\pi$$



（9） y 軸周りの回転体の体積であるから

$V=\pi\int_0^1 x^2\,dy$

$y=\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ を $x=$(yの式) と

変形したいが　ダメ…

$y=\cos x$ と $y=\sin x$ は同じ形のグラフに着目して　上図より　x 軸周り

の回転体の体積　$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$ と等しい…

残念ながら　間違いですね　積分区間が違う…

参考　教科書解答

置換積分　$\cos x=y$　微分　$-\sin x\,dx=dy$

y	$0\to 1$
x	$\frac{\pi}{2}\to 0$

従って　$V=\pi\int_0^1 x^2\,dy$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 x^2\cdot(-\sin x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$$

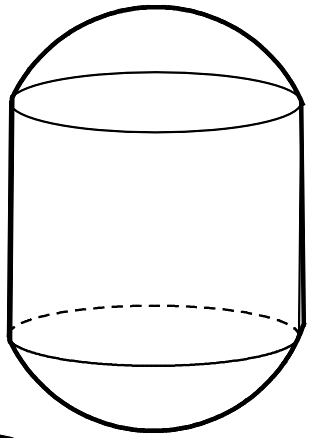
⟸部分積分を2回実施

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(-\cos x)'dx=-\left[x^2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x\,dx$$

$$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'dx=2\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=2\times\frac{\pi}{2}+2\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$=\pi-2$

ゆえに　$V=\pi(\pi-2)$



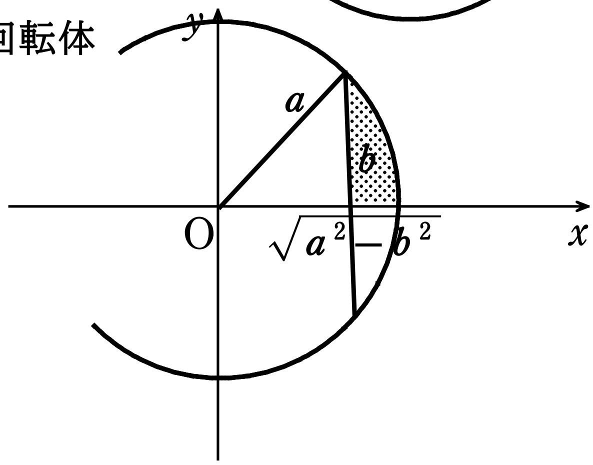
(10)　球からくりぬく円柱状の立体とは　円柱ではなくて円柱の上下にカップ形の立体が加わった　右図のような立体である。

よって　くりぬく立体の体積

V’＝円柱の体積＋２×（カップ形の立体の体積）

ここで　カップ形の立体の体積を求めよう。

$x^2+y^2=a^2$ の円弧の一部の x 軸周りの回転体の体積と考える。



右図

$$\pi\int_{\sqrt{a^2-b^2}}^{a} y^2dx=\pi\int_{\sqrt{a^2-b^2}}^{a}(a^2-x^2)dx$$

$$=\pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{a^2-b^2}}^{a}$$

$$=\pi\left\{\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)-\left(a^2\sqrt{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{3}\sqrt{a^2-b^2}\right)\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{2a^3}{3}-\sqrt{a^2-b^2}\left(\frac{2a^2+b^2}{3}\right)\right\}$$ 従って　球からくりぬいた立体を引く

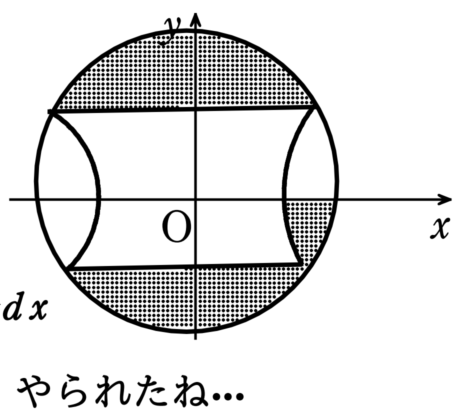
V＝球の体積 －{(半径 b 高さ $2\sqrt{a^2-b^2}$ の円柱の体積)＋2(カップの体積)}

$$=\frac{4}{3}\pi a^3-\left\{2\pi b^2\sqrt{a^2-b^2}+2\pi\left(\frac{2a^3}{3}-\frac{2a^2+b^2}{3}\sqrt{a^2-b^2}\right)\right\}$$

$$=-2\pi b^2\sqrt{a^2-b^2}+\frac{2\pi}{3}(2a^2+b^2)\sqrt{a^2-b^2}$$

$$=\frac{2\pi}{3}(-3b^2+2a^2+b^2)$$

$$=\frac{4}{3}\pi(a^2-b^2)$$ ⟸　凄い計算　やったね！



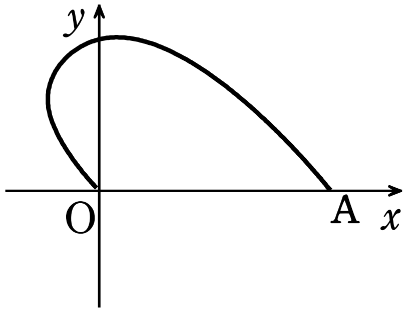
<u>反省</u>　教科書　解答 $2\pi\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}}\left\{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-b^2\right\}dx$

右図　こっちがすごく簡単な解答　数学おじさん　やられたね…

(11)　（ｉ）極座標 $(r,\ \theta)$ と直交座標 $(x,\ y)$ との関係　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

であるって，$r=1+\cos\theta$ であるから

$x=(1+\cos\theta)\cos\theta \quad y=(1+\cos\theta)\sin\theta$



（ii）曲線（カージオイド）の長さL

この曲線は x軸対称であるから　右図　AからO

までの曲線の長さ $\dfrac{L}{2}=\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$$\frac{dx}{d\theta}=(-\sin\theta)\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)=-\sin\theta(1+2\cos\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta}=(-\sin\theta)\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=-\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\sin^2\theta(1+2\cos\theta)^2+\{-\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta\}^2$$

$\cos\theta$ に統一　$\cos\theta=t$ とおく

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(1-t^2)(1+2t)^2+(t^2-1+t+t^2)^2$$

$=(1-t^2)(1+2t)^2+(2t^2+t-1)^2=(1+t)(1-t)(1+2t)^2+(t+1)^2(2t-1)^2$

$=(1+t)\{(1-t)(1+2t)^2+(1+t)(1-2t)^2\}$

$=(1+t)\{(1-t)(1+4t+4t^2)+(1+t)(1-4t+4t^2)\}$

$=(1+t)\{1+4t+4t^2-t-4t^2-4t^3+1-4t+4t^2+t-4t^2+4t^3\}$

$=(1+t)(1+3t-4t^3+1-3t+4t^3)=2(1+t)$

従って　$\dfrac{L}{2}=\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta$

半角公式　$1+\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ を活用

$$\frac{L}{2}=2\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta=2\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=4$$

ゆえに　L＝8